

Вероятностный и геометрический языки физики в контексте принципа наименьшего действия.

Терехович Владислав Эрикович

Кафедра философии науки и техники, Философский факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет
v.terekhovich@gmail.com

В статье рассмотрена возможность объединения геометрического языка сил и поля, геометрического языка четырехмерного пространства-времени и вероятностного языка квантовой механики. Показано, что все три языка эквивалентны какой-либо форме экстремального вариационного принципа - принципа наименьшего действия. Приводятся аргументы в пользу способности метода «интегралов по траекториям» Р.Фейнмана объяснить смысл частных формулировок принципа наименьшего действия. Для этого необходимо заменить классическое представление о движении объектов по уникальной траектории представлением об одновременном движении по бесконечному множеству возможных траекторий. Отсюда делается вывод - аксиомы классической и релятивистской механики являются частными случаями фейнмановской формулировки квантовой механики.

Ключевые слова: *Принцип наименьшего действия, принцип Гамильтона, интегралы по траекториям Фейнмана, вероятностная причинность.*

Probabilistic and Geometric Language of Physics in the context of the Principle of Least Action.

Terekhovich V. E.

The paper is devoted to the unification of three major languages of modern physics - the geometric language of forces and fields, the geometrical language of four-dimensional space-time and the probabilistic language of quantum mechanics. There are shown how each language may be removed from any form of extreme variation principle - the principle of least or stationary action. Author argues that the Richard Feynman's method of "path integral" can explain the semantic content of particular forms of the action principle. Axioms of classical and relativistic mechanics are consequences of the principle of least action in Feynman's formulation of quantum mechanics.

Keywords: *Principle of least action, Hamilton's principle, Feynman path integrals, probability causality.*

Введение.

В рамках конкретных разделов науки каждую область Природы принято описывать особым языком. В контексте статьи под языком раздела науки будем понимать не только формальную совокупность понятий, аксиом, логических правил, математического аппарата, но еще и онтологию, включающую смысловое понимание причинности и реальности [1].

В физике соседствуют языки, основанные на понятиях: сил, поля, потоков, устойчивости, геометрии пространства и времени, статистики, вероятности и т.д. Движение макрообъектов описывается на языке сил или поля. Для космологических объектов используется язык искривленного пространства-времени. Языки объединяет возможность геометрической репрезентации явлений и объектов и наличие однозначной причинно-следственной связи, но их философские основания отличаются. К вероятностному языку термодинамики, особенно неравновесной, до сих пор многие относятся как к статистическому приближению классической механики. После копенгагенской формулировки квантовой механики часть физиков смирились с неприменимостью языка геометрии и однозначной причинности к микрообъектам, часть, остались уверенными, что «волновая теория необходимо должна располагать средствами для перевода ее результатов на язык механики обычных объектов» [2]. Попытки свести квантовую вероятность к статистике или считать вероятностное описание неполным так и не удалось. Возникло несколько интерпретаций (или языков) квантовой механики [3]. Продолжаются попытки использования вероятностного языка для описания классических объектов [4]. Но проблема остается, - как совместить классические законы Природы и невозможность однозначного определения квантовых событий во времени и пространстве?

Р. Фейнман считал, что «каждый приличный физик-теоретик знает шесть или семь теоретических обоснований одних и тех же физических фактов» [5]. Но философские основания таких теорий во многом противоречат друг другу, а это не устраивает ученых хотя бы по методологическим и эстетическим мотивам. Если научное понимание – не что иное, как осознание связей [6], то сами связи осознаются на языке научного сообщества, который в свою очередь связан с господствующей парадигмой [7]. Получается, что понимание определяется общепринятым языком.

В статье описан способ снятия части противоречий между геометрическим языком сил и поля, геометрическим языком четырехмерного пространства-времени и вероятностным языком квантовой механики. Предлагаемое решение основано на использовании вариационного экстремального принципа – принципа наименьшего (стационарного) действия, далее ПНД. Физический и философский смысл принципа раскрывается благодаря

формулировке квантовой механики через «интегралы по траекториям», за применение этого метода в построении квантовой электродинамики Р. Фейнман получил Нобелевскую премию.

То, что для классической механики, классической теории поля и общей теории относительности является аксиомами, с точки зрения излагаемого подхода – необходимое следствие квантовой механики. Уравнения основных разделов физики могут быть представлены как частный случай уравнений квантовой механики, а геометрические способы представления движения в n -мерном пространстве – как удобное математическое приближение более фундаментального вероятностного представления.

О научной пользе ПНД известно давно [8]. А. Эйнштейн писал, что всю общую теорию относительности можно разработать на основе именно этого «одного-единственного вариационного принципа» [9]. М. Планк считал его более универсальным законом природы, чем закон сохранения энергии и импульса, поэтому ПНД «господствует над всеми обратимыми явлениями физики» [10]. А. Эддингтон писал уже о двух великих обобщениях науки – ПНД и втором законе термодинамики [11]. Т. Мур утверждает: «этот принцип находится в ядре большей части современной физики» [12]. Интерес к исследованию экстремальных принципов, в частности, ПНД не ослабевает, особенно в физике: [13].

Для обоснования предлагаемого решения показано, что уравнения основных физических теорий эквивалентны одной из форм ПНД. С одной стороны, разные формы ПНД эквивалентны друг другу, с другой, могут быть представлены как предельные случаи метода «интегралов по траекториям» Р. Фейнмана, основанного на понятии амплитуды квантовой вероятности. Отсюда делается вывод о первичности законов квантовой механики.

Четыре варианта описания движения классического тела.

Как известно, в физике существует четыре варианта или способа предсказания траектории полета для тела, брошенного под углом к горизонту [14].

Вариант №1. Теория Ньютона говорит, что тело обладает инерцией и притягивается к Земле с определенной силой, зависящей от массы тела. Действительное движение в каждый момент времени является суммой движений, вызванных этими двумя причинами. Согласно Ньютону, тело имеет внутреннее «стремление» двигаться прямолинейно и с постоянной скоростью, но «почувствовав» действие на себя внешней силы, тело ускоряется или меняет свое движение (вектор скорости) на определенную величину за каждый интервал времени. Предполагается, что сила действует на расстоянии (нелокально) и зависит от удаления тела

от центра тяжести Земли. Зная начальное местоположение и вектор начальной скорости тела, можно записать уравнение для вычисления точек его траектории.

Вариант №2. Тот же полет тела можно описать в терминах теории поля. В каждой точке пространства имеется число, называемое потенциалом и меняющееся от одной точки пространства к другой. Если в любую точку пространства поместить тело, на него будет действовать сила в направлении, в котором потенциал быстрее всего уменьшается, а величина силы будет пропорциональна тому, насколько быстро он уменьшается при перемещении из одной точки в другую. Траектория тела определяется силой в каждой точке пространства и инерцией тела. Вектор силы равен антиградиенту потенциальной энергии или массе тела умноженной на максимальную скорость уменьшения потенциала поля Земли. Тело как будто «прощупывает» пространство вокруг себя и устремляется туда, где потенциал поля тяготения будет наименьшим. Полевая формулировка позволяет предсказать полет тела, если известно, что происходит в данный момент в точках, его окружающих. Оговорка «в данный момент» принципиальна, поскольку в действительности подобное «прощупывание» пространства не происходит во времени. К сожалению, избавиться от метафор не удастся, иначе как объяснить, – откуда тело «узнает» величину потенциала в соседних точках?

Вариант №3. Существует другой способ, сильно отличающийся в философском смысле. Нам не нужно знать, что происходит в соседних моментах времени или в соседних точках пространства, достаточно знать начальное и конечное положение тела в пространстве и времени. Принцип наименьшего или стационарного действия утверждает, что из всех возможных перемещений тела из одной точки в другую, совершаемых за один и тот же промежуток времени, реальной траекторией будет та, для которой некая величина, называемая «действием» имеет минимальное или стационарное значение. ПНД в форме Гамильтона [15] утверждает, что по сравнению со всеми возможными траекториями вдоль действительной траектории тела разница между его средней кинетической и потенциальной энергией достигает минимума [16]. Из ПНД выводятся дифференциальные уравнения движения тела в поле силы тяжести (уравнения Эйлера-Лагранжа) [17]. Каждому виртуальному пути тела в пространстве соответствует некое количество действия, но только путь, у которого это число минимально, является действительным. Именно его мы наблюдаем как реальный, и он в точности совпадает с результатами вычислений, полученных в первых двух вариантах. Но в этот раз нам не надо думать ни о каких силах. Не нужна и фиктивная сила инерции, ведь в отсутствии потенциального поля, путь тела с

наименьшим количеством действия – это прямая с постоянной скоростью, вдоль которой действие минимально [18].

Вариант №4. В общей теории относительности не существует не только силы притяжения, но и потенциального поля тяготения, вместо них есть единое геометрическое пространство-время, искривленное под влиянием массы Земли. В этом пространстве-времени тело движется по инерции вдоль одной из мировых линий между начальным и конечным событиями. Линия эта называется геодезической. Форма геодезической линии вычисляется через уравнения четырехмерного пространства-времени, а результат вычислений в земных условиях совпадает с результатами трех предыдущих вариантов. Форма геодезической линии точно описывается ПНД классической механики [19]. Из всех возможных мировых линий между двумя событиями действительной является та, для которой величина собственного времени тела имеет максимальное или стационарное значение. Эта мировая линия называется геодезической [20]. Для слабых гравитационных полей и невысоких скоростей этот принцип сводится к ПНД в форме Гамильтона (вариант № 3). Из всех возможных путей тела в четырехмерном пространстве-времени есть только один путь с максимальным собственным временем или путь с максимальным старением. Этот путь мы и воспринимаем как действительный или реальный [21].

Формулировка квантовой механики Р. Фейнмана.

В 1942 году Ричард Фейнман [22] использовал идеи Гюйгенса и Френеля, ранее вдохновившие Э. Шредингера на его волновое уравнение, и предложил свою формулировку квантовой механики. Фейнман заменил классическое представление о движении тела по «одионой» и уникальной траектории представлением о движении по бесконечному множеству мыслимых траекторий, что математически описывается функциональным интегралом по этим траекториям. Частица движется одновременно по всем возможным траекториям, но волны вероятности этих путей гасятся в конечной точке траектории так, что максимальная вероятность отвечает действительному пути, для которого вариация некой величины равна нулю. По аналогии с классической механикой эту величину он назвал действием, которое связано с квантовой фазой [23]. Каждый возможный путь частицы связан с изменением фазы ее волны вероятности. Вблизи действительного пути волны вероятности находятся почти в одной фазе и взаимно усиливаясь, порождают значительный, наблюдаемый как «реальный», эффект. Остальные пути существуют вполне реально (хотя иногда их называют виртуальными или мыслимыми), просто они нами не наблюдаются, точнее, вероятность их наблюдения крайне мала. Вероятность обнаружения частицы равна

квадрату амплитуды вероятности (волновой функции) и эквивалентна результатам, получаемым матричным методом Гейзенберга и волновым уравнением Шредингера [24].

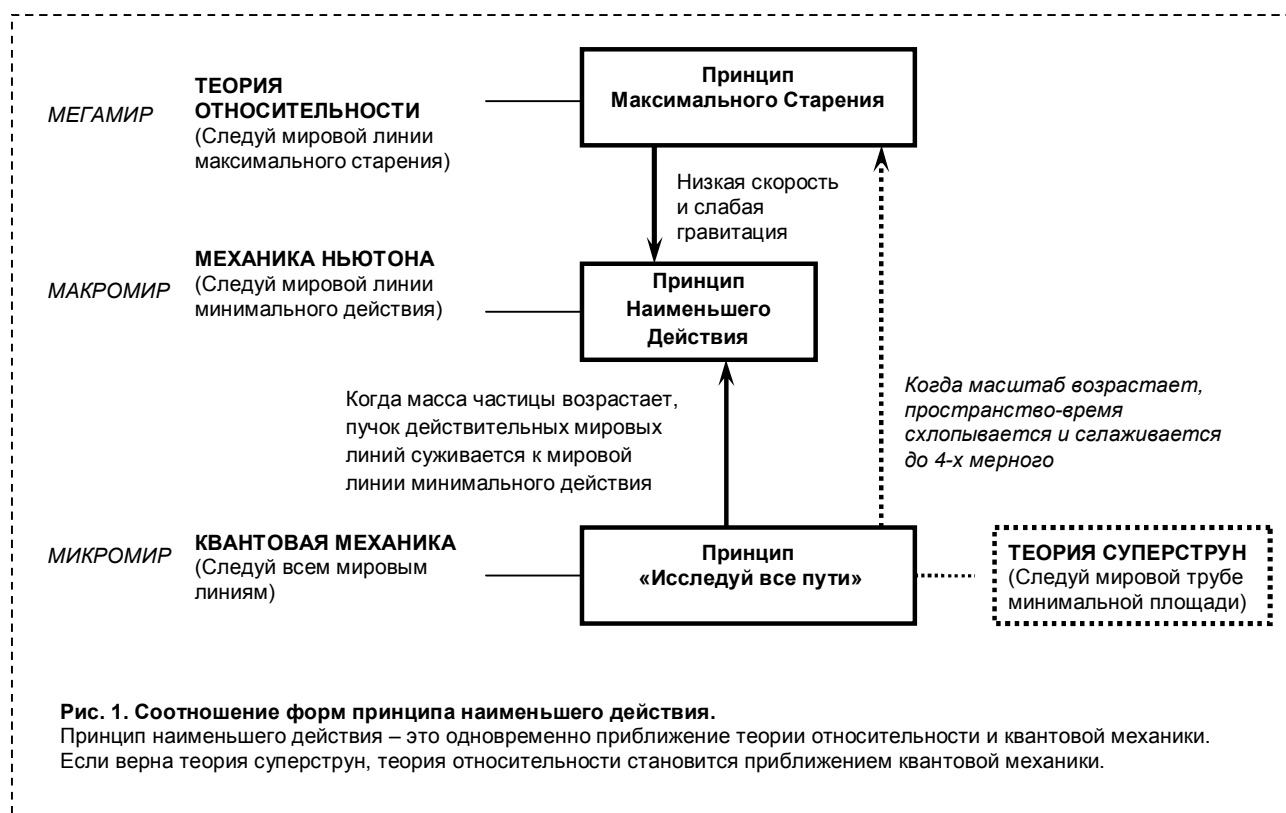
Классическое тело и квантовая механика.

Казалось бы, какое отношение имеет квантовая механика к полету классического тела? Законы для обычных тел однозначны и точно предсказывают их поведение, причем тут вероятности микромира? Но Фейнман делает вывод о первичности квантовой механики относительно классической механики и теории относительности, поскольку фундаментальные физические законы могут быть выражены в виде принципа наименьшего действия [25]. Даже связь между законами симметрии и сохранения, сформулированная в теореме Э. Нетер, покоится на принципе наименьшего действия, вытекающем из законов квантовой механики [26].

По Фейнману классическое тело, также как фотон или электрон, движется сразу по всем возможным путям (мировым линиям) между начальным и конечным событиями. Но поскольку фаза волны вероятности очень велика, набор мировых линий, вносящих значительный вклад в вероятность обнаружения классического тела, сокращается до узкого пучка. В пределе это единственная мировая линия, предсказанная классическим принципом наименьшего действия Гамильтона (вариант № 3) [27]. То, что физика Ньютона рассматривает как причину и следствие (ускорение производится силой), квантовые «интегралы по путям» рассматривают как баланс изменений в фазе, произведенных изменениями в кинетической и потенциальной энергии [28]. Классическая механика и теория поля становятся коротковолновым приближением квантовой механики, действие приобретает смысл фазы волновой функции. Больше нет необходимости прибегать к понятию сил, действующих на тело. Телу достаточно одновременно «пройти» все возможные пути из одной точки в другую и «выбрать» путь, для которого величина действия минимальна [29]. Возможно, термин «выбрать» здесь излишен, ведь классическая траектория отбирается не телом, а правилом сложения фаз волновых функций возможных траекторий.

По образному выражению Э. Тейлора, от объекта, перемещающегося с нерелятивистской скоростью в области слабого пространственно-временного искривления, Природа требует: Следуй путем наименьшего количества действия! Объекту, перемещающегося с любой возможной скоростью в области любого конечного пространственно-временного искривления, Природа командует: Следуй путем максимального старения! От электрона Природа требует: Исследуй все пути! [30]. В той же работе Тейлор приводит схему, где ПНД, с одной стороны, является частным случаем

принципа максимального старения, с другой, частным случаем принципа Фейнмана «исследуй все пути». Иначе говоря, классическая механика – одновременно приближение и общей теории относительности, и квантовой механики (см. рис. 1).



Попробуем расширить схему Тейлора (дополнения обозначены пунктирными линиями), используя его же метафоры. Команду Природы «исследуй все пути» приложим к пространству любой размерности и кривизны. Известно, что принцип максимального старения применим только к гладкому 4-х мерному пространству-времени, и если использовать аппарат квантовой механики для такого пространства, неизбежно возникают бесконечные и даже отрицательные вероятности. Одно из математических решений этой проблемы предлагает современная теория суперструн, требуя взамен дополнительных измерений [31]. По сегодняшним представлениям в каждой точке 4-х мерного пространства-времени находится еще шесть свернутых пространственных измерений.

Если теория суперструн верна (доказательств этого пока нет), можно предположить, что принцип максимального старения тоже является приближением метода «интегралов по траекториям». При увеличении масштаба пульсирующая ткань многомерного запутанного пространства-времени схлопывается и сглаживается до 4-х мерного [32]. Поскольку только в нем макрообъекты устойчивы, все возможные траектории в 10-мерном пространстве в

результате интерференции сводятся к траекториям в 3-х мерном. В таком случае не только классическая механика, но и общая теория относительности может стать частным случаем квантовой механики.

Обсуждение.

К обобщениям ПНД всегда относились насторожено. Одна из причин – призрак целевой причины. Обоснование простотой и совершенством Природы, понимаемыми телеологически, не вписывалось в научную парадигму, и постепенно ПНД превратился в чисто эвристическое правило. К противникам философской трактовки ПНД относились Ж. Даламбер [33]., Ж. Лагранж, К. Якоби, А. Эйнштейн, И. Пригожин и др. К. Ланцош пишет об Э. Махе, считавшим, что вариационные принципы механики – не более чем другая математическая формулировка законов Ньютона, не содержащая ничего нового, правда тут же добавляет: «современная математика не дает какого-либо другого метода, при помощи которого можно было бы сформулировать ковариантную и в то же время совместимую систему уравнений поля» [34].

М. Борн писал: «Закон гравитации Эйнштейна, включающий в себя закон Ньютона как предельный случай, может быть также получен из экстремального принципа», но следуя Маху, Борн подчеркивал, что экстремальное описание говорит не о свойстве природы, а о стремлении нашего мышления к экономии. [35]. По мнению других, ПНД имеет не только методологическое значение, но выражает единство и взаимосвязь принципов симметрии, сохранения и причинности [36]; ПНД обобщает не только физическую причинность, но и закономерность, необходимость, вероятность и связь состояний [37]; закон сохранения энергии, так же как и другие законы сохранения могут быть получены из действия и вариационных принципов [38]. Есть мнение, что именно в изложении Фейнмана квантовая механика предстает как обобщение классической механики [39], а использование фейнмановского интеграла по траекториям обеспечивает ясный и элегантный язык для описания перехода от классической к квантовой физике [40].

Создатели квантовой механики вслед за Эйлером, Лагранжем и Гамильтоном заимствовали оптико-механическую аналогию геометрической оптики (принципы Ферма и Гюйгенса) и механики (ПНД Гамильтона) [41]. Ту же аналогию использовали Д. Гильберт и А. Эйнштейн, выписывая уравнения общей теории относительности [42]. Применение одной аналогии для двух разных языков описания говорит в пользу их общности. Может быть, причина не только в методологическом удобстве?

Общая теория относительности способна объединить механику Ньютона и теорию поля для движения объектов в 4-х мерном пространстве-времени любой кривизны, но этот язык не применим в планковских масштабах. Только один язык успешно работает на всех трех уровнях - язык, использующий ПНД. На уровне 4-х мерного пространства-времени уравнения Эйнштейна эквивалентны принципу максимального старения для свободной частицы и принципу наименьшего действия гравитационного поля. На уровне классического пространства уравнения Ньютона и уравнения поля эквивалентны принципу наименьшего действия для свободных тел и полей разной природы [43]. На квантовом уровне уравнения квантовой теории поля эквивалентны методу «интегралов по траекториям». Последний, в свою очередь, объясняет, почему принцип наименьшего действия работает на других уровнях. Тогда именно метод Фейнмана отвечает на вопрос, почему квантовые, классические и релятивистские объекты подчиняются общим принципам.

Язык описания физических объектов на основе ПНД, опирающегося на трактовку квантовой механики Фейнмана, имеет ряд преимуществ.

1. Основные физические теории можно представить в качестве его приближений и частных случаев. Нет необходимости в понятии «сила».
2. Объясняет переход от вероятностной причинности к однозначной, для этого необходимо связать экстремальные принципы с понятием вероятности.
3. Соответствует результатам наблюдений объектов в микро, макро и мега-масштабах, эффективен для любых скоростей, для пространства любой размерности.
4. Опирается на простую систему понятий, имеет простой и универсальный математический аппарат – вариационное исчисление.

Конечно, есть сложности. «Интегралы по траекториям» сталкиваются с трудностями в квантовой теории поля. Настораживает и то, что формы ПНД для отдельных областей физики сильно отличаются. Что общего между разными формами действия – разностью кинетической и потенциальной энергии в классической механике, собственным временем в общей теории относительности и амплитудой вероятности в квантовой механике. Почему действие всегда экстремально? Почему любая форма действия инвариантна относительно преобразований пространства-времени? Как действие связано с энергией, пространством и временем?

Здравый смысл протестует и против предлагаемого объяснения сущности явлений. Если ПНД не просто удобный метод, а «интегралы по траекториям» не просто полезная метафора, как считает большинство физиков, то, как возможно, чтобы привычные объекты одновременно находились в разных точках пространства-времени, пусть даже виртуально?

Но самая радикальная идея языка, основанного на ПНД и «интегралах по траекториям», в том, что не только квантовые частицы, но любые объекты «исследуют» все возможные состояния и траектории, оказываясь в результате их интерференции в состоянии или на траектории, соответствующим неким экстремальным условиям. Что в действительности означают эти термины применительно к неживой материи? Сам Фейнман не вкладывал в свой метод философского смысла, считая его лишь удобным формализмом и указывая на недостатки [44]. Чтобы принять логику квантовой механики в формулировке Фейнмана для объяснения классических объектов, мы вынуждены будем пересмотреть взгляды на реальность и причинность. Вслед за В. Гейзенбергом, В. Фоком, Д. Бомом и К. Поппером придется вернуться к идее Аристотеля о разворачивании бытия из возможности в действительность, а классический однозначный детерминизм признать частным приближением вероятностной (но не статистической) причинности.

Заключение.

Метод в терминах «интегралов по траекториям», созданный Фейнманом для формулировки квантовой механики, способен обосновать математически и объяснить смысловое содержание других частных приложений ПНД. Для этого *достаточно заменить классическое представление о движении объектов по одиночной и уникальной траектории представлением об одновременном движении по бесконечному множеству возможных (мыслимых) траекторий*. Это движение описывается функциональным интегралом по всем траекториям.

То, что для классической и релятивистской механики является аксиомами, с точки зрения квантовой механики становится необходимым следствием. В результате, *уравнения основных разделов физики могут быть представлены как частный случай квантовой механики*. ПНД классической механики – как приближение квантовой механики при масштабах много больше планковских. Одновременно, это приближение общей теории относительности при низких скоростях. Предполагается, что уравнения общей теории относительности могут рассматриваться как приближение квантовой механики, при котором многомерное запутанное пространство-время схлопывается до гладкого четырехмерного.

Автор выражает искреннюю благодарность за помощь проф. Дмитриеву И.С., а также за полезную критику проф. Липкину А.И. и проф. Лукьяненко А.С.

Примечания.

1. В. Гейзенберг пишет о языке науки как совокупности понятий, логики, аксиом и онтологии, см.: *Гейзенберг В.* Язык и реальность в современной физике // У истоков квантовой теории. - М.: Тайдекс Ко, 2004. – С. 181. Т. Кун говорит о языках, используемых в науках и включающих «множество предположений относительно природы», см.: *Кун Т.* Структура научных революций. - М., 2003. – С. 192. На ключевую роль философских и научных языков указывает В.В. Налимов, подчеркивая важность вероятностного языка, см.: *Налимов В. В.* Спонтанность сознания. Вероятностная теория смыслов и смысловая архитектура личности. - М., 2011. – С. 18.
2. *Борн М.* Причина, цель и экономия в законах природы (Минимальные принципы в физике) // Физика в жизни моего поколения. Сб. - М., 1963. – С. 257.
3. См., например: *Jammer M.* The Philosophy of Quantum Mechanics. - Wiley, 1974.; *Севальников А. Ю.* Современное физическое познание: в поисках новой онтологии, - М.: ИФ РАН, 2003.
4. См., например: *Князева Е. Н.* Синергетическое погружение в бездны виртуальной реальности // Теоретическая виртуалистика: новые проблемы, подходы и решения. Ин-т философии РАН. - М.: Наука, 2008. – С. 237-261.; *Сачков Ю. В.* Эволюция учения о причинности // Спонтанность и детерминизм / Ред. В.В. Казютинский, Е.А. Мамчур, Ю.В.Сачков, А.Ю. Севальников и др. Ин-т философии РАН. - М.: Наука, 2006. – С. 16-42.
5. См.: *Фейнман Р.* Характер физических законов. - М.: Наука, 1987. – С. 154.
6. См.: *Гейзенберг В.* Смысл и значение красоты в точных науках // У истоков квантовой теории. Сборник. - М.: Тайдекс Ко, 2004. – С. 269.
7. См.: *Кун Т.* Структура научных революций. - М., 1975. – 143.
8. См.: *Разумовский О. С.* Современный детерминизм и экстремальные принципы в физике. - М., 1975.; *Ассеев В.А.* Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. - Л., 1977.; *Вариационные принципы механики* / Под ред. Л.С. Полака. - М., 1959.; *Полак Л.С.* Вариационные принципы механики: Их развитие и применение в физике. – М., 2010.; *Variational and Extremum Principles in Macroscopic Systems* / Ed. S. Sieniutycz and H. Farkas. - Elsevier Ltd. 2005.
9. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов в 4 т. - М., 1965. - Т. 1. – С. 524.
10. *Планк М.* Физические очерки. - М., 1925. – С. 95.
11. См.: *Эддингтон А.* Пространство, время и тяготение. - М., 2003. – С. 149.
12. *Thomas A. Moore* in the entry on “least-action principle” in *Macmillan Encyclopedia of Physics*. New York: Simon & Schuster Macmillan. - 1996. - Vol. 2. - P. 840–842.
13. См, например: *Variational and Extremum Principles in Macroscopic Systems* / Ed. S. Sieniutycz and H. Farkas. - Elsevier Ltd. 2005.; *Евсеевичев Н. И.* Новое прочтение "Математических начал натуральной философии" Ньютона. Принцип наименьшего действия, которым владел автор "Начал" // Физическое образование в вузах. - М.: МФО, 2005. - Т.11. - № 4.; *Gray C.G., Taylor E.F.* When Action is Not Least // *American Journal of Physics*. - 2007. - Vol. 75.; *Сбитнев В.И.* Бомовские траектории и парадигма интегрирования по путям. Комплексная Лагранжева механика // *Квантовая Магия*. - 2008. - Т. 5. - Вып. 4. - С. 4132-4147.; *Gray C.G., Poisson E.* When Action is Not least for Orbits in General Relativity // *American Journal of Physics*. - 2010. - Vol. 78.; *Gorobey N.N., Lukyanenko A.S.* Quantum Action Principle in Relativistic Mechanics. 2008. - [Эл. ресурс]. – Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/0812.1336>.
14. Наглядное описание первых трех способов см.: *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6: Электродинамика. - М., 2004. – С. 96.; *Фейнман Р.* Характер физических законов. - М.: Наука, 1987. – С. 43.
15. Возник этот принцип из оптико-механической аналогии с принципом Ферма, согласно которому луч света движется по пути, занимающем минимальное время. Э. Шредингер в своей Нобелевской речи показал, что только с точки зрения волнового способа рассмотрения принципы Гамильтона и Ферма раскрывают свое истинное значение, см.: *Шредингер Э.* Основная идея волновой механики // Современная квантовая механика. - Л.-М., 1934. – С. 47.
16. Строго говоря, интеграл S должен быть минимален лишь вдоль малых участков линии интегрирования. Для линий произвольной длины, а также в седловых точках можно утверждать только, что S имеет экстремум, не обязательно являющийся минимумом.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10 т. - М., 2004. - Т. I – С. 12.
18. ПНД имеет преимущество перед принципом сохранения энергии и вариационными принципами механики (Д'Аламбера, виртуальных перемещений, Гаусса и др.). В одном уравнении ПНД дает соотношение между величинами, имеющими значение для механики, электродинамики и термодинамики – пространство, время и потенциал, см.: *Планк М.* Теоретическая физика. - СПб, 1911. – С. 121.
19. См.: *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. - М., 1965. – С. 314.
20. Используя принцип максимального старения, можно изучать звезды и черные дыры без тензоров и уравнений поля общей теории относительности, см.: *Taylor E. F., Wheeler J. A.* Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity. - San Francisco: Addison Wesley Longman, MA, 2000.

21. См.: *Taylor E.F., Wheeler J.A.* Spacetime Physics. - Freeman, New York, 1992.
22. *Feynman R.* The principle of Least Action in Quantum mechanics // Feynman's thesis: A new approach to quantum theory / Ed.: L. M. Brown. Hackensack, N. J. et al.: World scientific, 2005. - XXII. – P. 119.
23. См.: *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовые интегралы по траекториям. - М., 1968. - С. 41.
24. См.: *Taylor E. F.* Use, Abuse, and Unjustified Neglect of the Action Principle. The Girep conference 2006, Modeling in Physics and Physics Education. Universiteit van Amsterdam.
25. См.: *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6: Электродинамика. - М., 2004. – С. 108.
26. См.: *Фейнман Р.* Характер физических законов. - Наука, 1987. – С. 93.
27. См.: *Taylor E. F.* A call to action. American Journal of Physics. - 2003. - Vol. 71, is. 5.
28. См.: *Ogborn J., Taylor E.F.* Quantum physics explains Newton's laws of motion. Physics Education. - 2005. - №40, is 1.
29. См.: *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 6: Электродинамика. - М., 2004. – С. 111.
30. См.: *Taylor E. F.* A call to action. American Journal of Physics. - 2003. - Vol. 71, is. 5.
31. См.: *Грин Б.* Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. - М.: Едиториал УРСС, 2005. – С. 137-138.
32. Предполагается, что струна движется в пространстве вдоль мирового листа или по мировой трубе, а для расчета траектории ее движения минимизируется аналог длины пути — площадь трубы. См. статью Нобелевского лауреата по физике за 2004 год Дэвида Гросса: *Гросс Д.* Грядущие революции в фундаментальной физике. Вторые публичные лекции по физике, ФИАН, 13.05.2006. Элементы. - [Эл. ресурс]. – Режим доступа: <http://elementy.ru/lib/430177>.
33. См.: *Даламбер Ж.* Космология // Вариационные принципы механики / Под ред. Л. С. Полака. - М., 1959. – С. 115.
34. См.: *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. - М., 1965. – С. 24.
35. См.: *Борн М.* Причина, цель и экономия в законах природы (Минимальные принципы в физике) // Физика в жизни моего поколения. Сб. - М., 1963. – С. 131-132.
36. См.: *Разумовский О. С.* Современный детерминизм и экстремальные принципы в физике. - М., 1975. – С. 169.
37. См.: *Ассеев В.А.* Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. - Л., 1977. – С. 182.
38. См.: *Goldstein H., Poole C., Safko I.* Classical Mechanics. 3rd ed. - New York: Addison-Wesley, 2002.; *Brizard A.J.* An Introduction to Lagrangian Mechanics. - World Scientific: Singapore, 2008.
39. См.: *Мякишев Г. Я.* Динамические и статистические закономерности в физике. - М., 1973. – С. 157.
40. См.: *Рамон П.* Теория поля. Современный вводный курс. - М., 1984. – С. 11.
41. См.: *Шредингер Э.* Квантование как задача о собственных значениях // Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Полака. - М.: 1959. – С. 679-704.
42. См.: *Эйнштейн А.* Принцип Гамильтона и общая теория относительности // Вариационные принципы механики / Под ред. Л.С. Полака. - М.: 1959. – С. 599.
43. См.: *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. - М., 2003. - Т. II.
44. См.: *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовые интегралы по траекториям. - М., 1968. – С.377.